Aulas Práticas de Matemática II

Curso de Arquitectura
Resumo da Matéria com exercícios propostos e resolvidos

Henrique Oliveira e João Ferreira Alves

Conteúdo

Neste breve texto o aluno pode encontrar exemplos de resolução e os exercícios propostos para as práticas de Matemática II do Mestrado em Arquitectura. Estão previstas 13 aulas práticas de 90 minutos.

Os capítulos podem ter a seguinte distribuição, que tenho seguido com pequenas variantes:

Capítulo 1 - 1 aula
Capítulo 2 - 2 aulas
Capítulo 3 - 2 aula
Capítulo 4 - 2 aulas
Capítulo 5 - 3 aulas
Capítulo 6 - 2 aulas
Capítulo 7 - 1 aula

No final das folhas estão dois testes tipo que cobrem a matéria dada na Matematica II.

Aulas Práticas de Matemática II
Mestrado em Arquitectura
2^o Semestre

Ficha 1

1 Derivadas parciais

1) Calcule as derivadas parciais e o gradiente de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ quando:

a) $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$
b) $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_1x_2$
c) $f(x_1, x_2) = \sin(x_1^2x_2^3)/\left(x_2^2 + 1\right)$
d) $f(x_1, x_2) = \sin(x_1x_2)\cos(x_1 + x_2)$
e) $f(x_1, x_2) = e^{3x_1+5x_2}$
f) $f(x_1, x_2) = \log(2x_1^2 + x_2^2 + 1)$

2) Calcule as derivadas parciais e o gradiente de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ quando:

a) $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - 4x_2 + x_3$
b) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_1x_2x_3$
c) $f(x_1, x_2, x_3) = \cos(x_1x_2x_3)$
d) $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1x_2)/\left(\cos(x_1x_3) + 2\right)$
e) $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(2x_1 - x_2)e^{3x_2+5x_3}$
f) $f(x_1, x_2, x_3) = \log(x_1^2 + x_2^2 + 1)e^{x_2+2x_3}$

3) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x_1, x_2) = (x_1 \cos(x_2), x_1 \sin(x_2))$.
a) Calcule a matriz jacobiana e o jacobiano de f em $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.
b) Existirão $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ e $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$f'((a_1, a_2); (v_1, v_2)) = (0, 0)?$$

4) Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cos(x_2), x_1 \sin(x_2), x_3)$.
a) Calcule a matriz jacobiana e o jacobiano de f em $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$.
b) Existirão $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ e $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$f'((a_1, a_2, a_3); (v_1, v_2, v_3)) = (0, 0, 0)?$$

Ficha 2

2 Polinómios de Taylor de um campo escalar.

Recorde que os polinómios de Taylor são uma importante ferramenta para estudar o comportamento de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ numa vizinhança de um dado ponto $a \in \mathbb{R}^n$. São particularmente úteis na identificação dos pontos de máximo e mínimo locais de f.

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tem derivadas parciais contínuas de qualquer ordem numa vizinhança de um ponto $a \in \mathbb{R}^n$, define-se o polinómio de Taylor de ordem k da função f no ponto a, com sendo:

$$P_k(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_i = 1}^{n} \frac{\partial^i f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_i}}(a).(x_{j_1} - a_{j_1}) \cdots (x_{j_i} - a_{j_i}),$$

com $a = (a_1, ..., a_n)$ e $x = (x_1, ..., x_n)$.

2.1 O primeiro polinómio de Taylor.

Note que para $k = 1$ temos:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a).(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a).(x_n - a_n) \\ &= f(a) + Df(a) \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde $Df(a)$ designa a matriz jacobiana de f em a, ou seja

$$Df(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}.$$

Exercício: Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$.

a) Determine $P_1(x, y)$ para $a = (0, 0)$ e identifique o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0, 0, 0)$.

b) Determine $P_1(x, y)$ para $a = (1, 1)$ e identifique o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1, 2)$.

Resolução: a) Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

e portanto

$$\begin{aligned} P_1(x, y) &= f(0, 0) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= 0 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Recorde que o gráfico de f é a superfície de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\begin{aligned} G_f &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\} \end{aligned}$$

Como sabemos, o gráfico de P_1, ou seja

$$G_{P_1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = P_1(x,y)\},$$

é o plano tangente em $(0,0,f(0,0)) = (0,0,0)$ ao gráfico de f. Assim basta ter em conta que $P_1(x,y) = 0$ para concluirmos que o plano tangente a G_f em $(0,0,0)$ é dado por

$$G_{P_1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}.$$

b) Para $a = (1,1)$ temos

$$\begin{aligned} P_1(x,y) &= f(1,1) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \end{bmatrix} \\ &= 2 + \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \end{bmatrix} = 2 + 2(x-1) + 2(y-1). \end{aligned}$$

O plano tangente em $(1,1,f(1,1)) = (1,1,2)$ ao gráfico de f é dado por

$$G_{P_1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 + 2(x-1) + 2(y-1)\}.$$

Exercício 1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \log(x^2 + y^2 + 1)$.

a) Determine $P_1(x,y)$ para $a = (0,0)$ e identifique o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0,0,0)$.

b) Determine $P_1(x,y)$ para $a = (1,0)$ e identifique o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,0,\log(2))$.

c) Determine $P_1(x,y)$ para $a = (0,1)$ e identifique o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0,1,\log(2))$.

Solução:
a) $P_1(x,y) = 0$, a equação do plano tangente é: $z = 0$.
b) $P_1(x,y) = x + \log(2) - 1$, a equação do plano tangente é: $z - x = \log(2) - 1$.
c) $P_1(x,y) = y + \log(2) - 1$, a equação do plano tangente é: $z - y = \log(2) - 1$.

2.2 O segundo polinómio de Taylor.

Para descrever o segundo polinómio de Taylor é conveniente introduzir a matriz Hessiana de f no ponto $a \in \mathbb{R}^n$

$$Hf(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_{n-1}}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_{n-1}}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_{n-1}}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_{n-1}}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n}(a) \end{bmatrix}$$

Note que se as segundas derivadas parciais de f são contínuas então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a),$$

pelo que $Hf(a)$ é uma matriz simétrica, ou seja $Hf(a) = Hf(a)^T$.

Com esta notação podemos escrever:

$$\begin{aligned} P_2(x) &= P_1(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).(x_i - a_i)(x_j - a_j) \\ &= f(a) + Df(a)\begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 - a_1 & \cdots & x_n - a_n \end{bmatrix} Hf(a) \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exercício: Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \log(x^2 + y^2 + 1)$. Calcule o segundo polinómio de Taylor de f relativo ao ponto $(0,0)$.

Resolução: Temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2+1}, \; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2+1},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2y^2 - 2x^2 + 2}{(x^2+y^2+1)^2}, \; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2x^2 - 2y^2 + 2}{(x^2+y^2+1)^2}$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{-4xy}{(x^2+y^2+1)^2}.$$

Logo

$$Df(0,0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

e portanto

$$\begin{aligned} P_1(x,y) &= f(0,0) + Df(0,0)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= 0 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2(x,y) &= P_1(x,y) + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} Hf(0,0)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= 0 + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Exercício 2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = (x^2 + 3y^2)\exp(1 - x^2 - y^2)$.

a) Determine $P_2(x,y)$ para $a = (0,0)$.

b) Determine $P_2(x,y)$ para $a = (1,0)$.

c) Determine $P_2(x,y)$ para $a = (0,1)$.

d) Determine $P_2(x,y)$ para $a = (-1,0)$.

e) Determine $P_2(x,y)$ para $a = (0,-1)$.

Solução:

a) $P_2(x,y) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2e & 0 \\ 0 & 6e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ex^2 + 3ey^2.$

b) $P_2(x,y) = 1 + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x-1 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-1 \\ y \end{bmatrix} = 1 - 2(x-1)^2 + 2y^2.$

c) $P_2(x,y) = 3 + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x & y-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y-1 \end{bmatrix} = 3 - 2x^2 - 6\,(y-1)^2.$

d) $P_2(x,y) = 1 + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x+1 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x+1 \\ y \end{bmatrix} = 1 - 2\,(x+1)^2 + 2y^2.$

e) $P_2(x,y) = 3 + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x & y+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y+1 \end{bmatrix} = 3 - 2x^2 - 6\,(y+1)^2.$

2.3 Extremos locais.

No que se segue assumimos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tem terceiras derivadas parciais contínuas em qualquer ponto de $\mathbb{R}^n$.

Dado um ponto $a \in \mathbb{R}^n$, dizemos que f tem um máximo local em a (resp. mínimo local em a) se existir uma bola de centro em a e raio $r > 0$ tal que

$$f(a) \geq f(x) \text{ (resp. } f(a) \leq f(x)) \text{ para qualquer } x \in B_r(a).$$

Dizemos que a é um ponto crítico de f se a matriz jacobiana de f em a for a matriz nula. Por outras palavras, a é um ponto crítico de f se

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(a) & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O teorema que se segue é uma consequência simples das definições:

Teorema1: Se f tem em a um máximo ou mínimo local, então a é um ponto crítico de f.

Notemos no entanto que podem existir pontos críticos de f que não são pontos de máximo nem de mínimo local. Tais pontos chamam-se pontos de sela de f.

A noção de segundo polinómio de Taylor desempenha um papel determinante na demonstração do seguinte resultado, que em muitas situações permite classificar os pontos críticos de f.

Teorema 2: Para qualquer ponto crítico, a, de f tem-se:

a) Se a matriz $Hf(a)$ é definida positiva, então f tem um mínimo em a.

b) Se a matriz $Hf(a)$ é definida negativa, então f tem um máximo em a.

c) Se a matriz $Hf(a)$ é indefinida, então a é um ponto de sela de f.

Exercício: Identifique e classifique os pontos críticos de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - x - y.$$

Resolução: Porque

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^2 - 1 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y^2 - 1,$$

temos

$$Df(x,y) = \left[\begin{array}{cc} x^2-1 & y^2-1 \end{array}\right].$$

Vemos assim que os pontos críticos de f são: $(1,1), (-1,1), (1,-1)$ e $(-1,-1)$. Por outro lado a matriz hessiana de f é

$$Hf(x,y) = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{array}\right],$$

tendo-se em particular:

$$Hf(1,1) = \left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{array}\right], Hf(-1,1) = \left[\begin{array}{cc} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{array}\right],$$

$$Hf(1,-1) = \left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{array}\right] \text{ e } Hf(-1,-1) = \left[\begin{array}{cc} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{array}\right].$$

Com isto podemos concluir que f tem pontos de sela em $(-1,1)$ e $(1,-1)$, já que as matrizes $Hf(-1,1)$ e $Hf(1,-1)$, tendo valores próprios com sinal contrário, são indefinidas. No ponto $(1,1)$ temos um mínimo local pois a matriz $Hf(1,1)$, tendo todos os valores próprios positivos, é definida positiva. No ponto $(-1,-1)$ temos um máximo local pois a matriz $Hf(-1,-1)$, tendo todos os valores próprios negativos, é definida negativa.

Exercício 3. Identifique e classifique os pontos críticos de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ quando:

a) $f(x,y) = x^2 - y^2 + xy$;	b) $f(x,y) = x^2 - 3xy + 5x - 2y + 6y^2 + 8$;
c) $f(x,y) = \exp(1 + x^2 - y^2)$;	d) $f(x,y) = e^x \cos y$;
e) $f(x,y) = y + x \sin y$;	f) $f(x,y) = (x^2 + 3y^2)\exp(1 - x^2 - y^2)$.

2.4 Extremos absolutos

Recordemos que um cunjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ diz-se limitado se existir um número $r > 0$ tal que

$$\|x\| \leq r, \text{ para qualquer } x \in S.$$

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado e fechado.

Nestas condições demonstra-se que existem pontos a e b de S tais que

$$f(a) \geq f(x), \text{ para qualquer } x \in S$$

e

$$f(x) \geq f(b), \text{ para qualquer } x \in S.$$

Dizemos então que $f(a)$ é o valor máximo de f em S, e que a é um ponto de máximo absoluto de f em S. Analogamente, dizemos que que $f(b)$ é o valor mínimo de f em S, e que b é um ponto de mínimo absoluto de f em S.

O teorema que se segue é muitas vezes útil na determinação dos valores máximos e mínimos de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ num conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$.

Teorema 3. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função com primeiras derivadas parciais contínuas, e $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado e fechado. Seja ainda $a \in S$ um ponto de máximo absoluto de f em S, e $b \in S$ um ponto de mínimo absoluto de f em S. Então tem-se:

1) Se a não pertence à fronteira de S então a é um ponto crítico de f;

2) Se b não pertence à fronteira de S então b é um ponto crítico de f.

Exercício: Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = e^{1-x^2-y^2}$, e

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

Calcular o valor máximo e o valor mínimo de f em S.

Resolução: Comecemos por notar que as primeiras derivadas parciais de f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2xe^{1-x^2-y^2} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2ye^{1-x^2-y^2}$$

são contínuas no seu domínio, e que $(0, 0)$ é o único ponto crítico de f. Notemos também que o conjunto S é limitado e fechado com fronteira

$$\partial S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

Estamos assim em condições de aplicar o teorema 3.

Consideremos então um ponto $a \in S$ de máximo absoluto e um ponto $b \in S$ de mínimo absoluto. Pelo Teorema 3, e porque $(0,0)$ é o único ponto crítico de f em S, temos:

$$(a \in \partial S \text{ ou } a = (0,0)) \text{ e } (b \in \partial S \text{ ou } b = (0,0)),$$

consequentemente

$$(f(a) = 1 \text{ ou } f(a) = e) \text{ e } (f(b) = 1 \text{ ou } f(b) = e).$$

Assim, porque $f(a)$ é o valor máximo de f em S, e $f(b)$ é o valor mínimo de f em S, teremos necessariamente

$$\text{máximo de } f \text{ em } S = f(a) = e,$$

e

$$\text{mínimo de } f \text{ em } S = \ f(b) = 1,$$

como se pretendia calcular.

Exercício: Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = e^{1-x^2-y^2}$, e

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

Calcular o valor máximo e o valor mínimo de f em S.

Resolução: Notemos que neste caso não existem pontos críticos de f em S. Notemos também que o conjunto S é limitado e fechado com fronteira

$$\partial S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\right\}.$$

Consideremos então um ponto $a \in S$ de máximo absoluto e um ponto $b \in S$ de mínimo absoluto. Pelo Teorema 3 temos:

$$a \in \partial S \text{ e } b \in \partial S,$$

consequentemente

$$\left(f(a) = 1 \text{ ou } f(a) = e^{-3}\right) \text{ e } \left(f(b) = 1 \text{ ou } f(b) = e^{-3}\right),$$

e portanto

$$\text{máximo de } f \text{ em } S = f(a) = 1,$$

e

$$\text{mínimo de } f \text{ em } S = \ f(b) = e^{-3},$$

como se pretendia calcular.

Ficha 3

3 Curvas e caminhos.

Recorde que um caminho em $\mathbb{R}^3$ é uma função contínua

$$\mathbf{c} : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3.$$

Um subconjunto $C \subset \mathbb{R}^3$ é uma curva se existir um caminho $\mathbf{c} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$C = \{\mathbf{c}(t) : t \in [a,b]\},$$

dizemos então que o caminho $\mathbf{c}$ é uma parametrização da curva C.

Exemplo 1. Qualquer segmento de recta é uma curva. O caminho $\mathbf{c} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$\mathbf{c}(t) = (x_0 + t(x_1 - x_0), y_0 + t(y_1 - y_0), z_0 + t(z_1 - z_0))$$

é uma parametrização do segmento de recta com extremidades em $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$.

Exemplo 2. A circunferência

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ e } z = 0\right\}$$

é uma curva. O caminho $\mathbf{c} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$\mathbf{c}(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$$

é uma parametrização da circunferência.

Exemplo 3. A elipse

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ e } z = 0\right\}$$

é uma curva. O caminho $\mathbf{c} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$\mathbf{c}(t) = (a\cos(t), b\sin(t), 0)$$

é uma parametrização da elipse.

Exemplo 4. O arco de parábola

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2,\ x \in [-1,1] \text{ e } z = 0\right\}$$

é uma curva. O caminho $\mathbf{c} : [-1,1] \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$\mathbf{c}(t) = (t, t^2, 0)$$

é uma parametrização do arco de parábola.

Exercício 1. Determine uma parametrização da curva C quando:

a) C é o segmento de recta de extremidades $(1,0,1)$ e $(1,2,2)$;

b) $C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 9 \text{ e } z = 0\right\}$;

c) $C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ e } z = 0\right\}$;

d) $C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = \sin(x),\ x \in [0, 2\pi] \text{ e } z = 0\right\}$.

3.1 Comprimento de arco.

No que se segue admitimos que o caminho

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{c}: & [a,b] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \to & (c_1(t), c_2(t), c_3(t)) \end{array}$$

é continuamete diferenciável no seu domínio. Recordemos que a matriz jacobiana de $\mathbf{c}$ em t é definida por

$$\mathbf{c}'(t) = \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ c_3'(t) \end{bmatrix}.$$

A esta matriz (ou ao vector $(c_1'(t), c_2'(t), c_3'(t))$) chamamos vector velocidade de $\mathbf{c}$ em t. Notemos que se $\mathbf{c}$ é uma parametrização da curva C, então a recta tangente a C no ponto $\mathbf{c}(t_0)$ tem a direcção do vector $\mathbf{c}'(t_0)$. Em particular a equação vectorial da recta tangente a C no ponto $\mathbf{c}(t_0)$ é

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{c}(t_0) + (t - t_0)\mathbf{c}'(t_0).$$

O vector velocidade desempenha um papel fundamental no cálculo do comprimento de uma curva. Com efeito, o espaço percorrido por $\mathbf{c}(t)$ para $t_0 \leq t \leq t_1$ é dado por

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \left\|\mathbf{c}'(t)\right\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[c_1'(t)]^2 + [c_2'(t)]^2 + [c_3'(t)]^2} dt.$$

Exercício 2. Calcular o comprimento da curva C quando:

a) C é parametrizada por $(2\cos(t), 2\sin(t), 0)$ com $0 \leq t \leq 2\pi$;

b) C é parametrizada por $(2\cos(t), 2\sin(t), t)$ com $0 \leq t \leq 2\pi$;

c) C é parametrizada por $(t, t^2, 0)$ com $-1 \leq t \leq 1$.

Sugestão para a alínea c): Verifique que

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \log(x + \sqrt{x^2 + a^2})\right] + k.$$

Nota 1 *Sabemos que a fórmula de mudança de variável na primitiva é*

$$I = \int f(t)\ dt = \int f(t(u))\, t'(u)\ du, \text{ quando se faz } t = t(u).$$

Seja $\int \sqrt{a^2 + t^2}\ dt$, *como calcular esta primitiva? Há diferentes caminhos, vamos utilizar uma substituição do tipo*

$$\begin{array}{rcl} t &=& a \sinh u, \\ u &=& \log\left(t + \sqrt{t^2 + a^2}\right) - \log a. \end{array}$$

Nota: a expressão em segundo lugar deduz-se sabendo que $t = a\sinh u = a\frac{e^u - e^{-u}}{2}$*, temos assim*

$$2t = ae^u - \frac{a}{e^u} \Leftrightarrow 2te^u = ae^{2u} - a \Leftrightarrow ae^{2u} - 2te^u - a = 0,$$

que é uma equação do segundo grau para e^u*. Queremos* u *como função de* t*. Aplicando a fórmula resolvente destas equações teremos*

$$e^u = \frac{2t \pm \sqrt{4t^2 + 4a^2}}{2a} = \frac{1}{a}\left(t + \sqrt{t^2 + a^2}\right),$$

note-se que apenas a raiz positiva faz sentido. O resultado obtém-se aplicando o logaritmo

$$u = \log\frac{1}{a}\left(t + \sqrt{t^2 + a^2}\right) = \log\left(t + \sqrt{t^2 + a^2}\right) - \log a.$$

Vamos utilizar a fórmula da mudança de variável na primitiva I*:*

$$I = \int \sqrt{a^2 + t^2}\, dt = \int \sqrt{a^2 + (a\sinh u)^2}\; (a\sinh u)'\; du = \int \sqrt{a^2\left(1 + \sinh^2 u\right)}\; a\cosh u\, du.$$

Da fórmula fundamental da trigonometria hiperbólica temos que $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$*, de onde a primitiva acima se simplifica para*

$$I = \int \sqrt{a^2\cosh^2 u}\; a\cosh u\, du = a^2 \int \cosh^2 u\, du.$$

Como

$$\cosh^2 u = \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2u} + e^{-2u}}{4} + \frac{1}{2},$$

a primitiva fica

$$I = a^2 \int \left(\frac{e^{2u} + e^{-2u}}{4} + \frac{1}{2}\right)\, du = a^2\left(\frac{e^{2u} - e^{-2u}}{8} + \frac{u}{2}\right) + K = a^2\left(\frac{\sinh 2u}{4} + \frac{u}{2}\right) + K.$$

Aqui notamos que

$$\frac{\sinh 2u}{4} = \frac{e^{2u} - e^{-2u}}{8} = \frac{1}{2}\frac{e^u - e^{-u}}{2}\frac{e^u + e^{-u}}{2} = \frac{1}{2}\sinh u\cosh u,$$

de onde resulta que a primitiva pretendida é

$$I = a^2\left(\frac{1}{2}\sinh u\cosh u + \frac{u}{2}\right) + K = \frac{a^2}{2}\left(\sinh u\sqrt{1 + \sinh^2 u} + u\right) + K.$$

Neste ponto é necessário regressar à variável t*, sabemos como* u *se relaciona com* t*, sabemos ainda que* $\sinh u = \frac{t}{a}$ *o que resulta imediatamente em*

$$\begin{aligned}
I &= \frac{a^2}{2}\left(\frac{t}{a}\sqrt{1 + \frac{t^2}{a^2}} + \log\left(t + \sqrt{t^2 + a^2}\right) - \log a\right) + K \\
&= \frac{a^2}{2}\left(\frac{t}{a}\sqrt{\frac{a^2 + t^2}{a^2}} + \log\left(t + \sqrt{t^2 + a^2}\right)\right) + K - \frac{a^2}{2}\log a \\
&= \frac{1}{2}\left(t\sqrt{a^2 + t^2} + a^2\log\left(t + \sqrt{t^2 + a^2}\right)\right) + k \\
&= \frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2 + a^2} + a^2\log\left(t + \sqrt{t^2 + a^2}\right)\right) + k.
\end{aligned}$$

3.2 Torsão e curvatura.

Seja $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ um caminho com derivadas de qualquer ordem e tal que

$$\left\|\mathbf{c}'(s)\right\| = 1 \text{ e } \left\|\mathbf{c}''(s)\right\| \neq 0, \text{ para qualquer } s.$$

Nestas condições podemos definir os vectores

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{c}'(s),\ \mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{\|\mathbf{T}'(s)\|} \text{ e } \mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s),$$

a que chamamos respectivamente, vector tangente unitário, vector normal e vector binormal no ponto $\mathbf{c}(s)$. Note-se que os vectores $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{N}(s)$ e $\mathbf{B}(s)$ são unitários e ortogonais entre si, ou seja constituem uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$. Demonstra-se em particular que existem números reais únicos κ e τ tais que

$$\mathbf{T}'(s) = \kappa\mathbf{N}(s),\ \mathbf{N}'(s) = -\kappa\mathbf{T}(s) + \tau\mathbf{B}(s) \text{ e } \mathbf{B}'(s) = -\tau\mathbf{N}(s).$$

Aos números κ e τ chamamos respectivamente curvatura e torsão de $\mathbf{c}$ no ponto $\mathbf{c}(s)$.

Exercício 3. Demonstre que a curvatura de uma circunferência em qualquer dos seus pontos coincide com o inverso do seu raio.

Exercício 4. Demonstre que se uma curva está contida num plano então tem torsão nula em qualquer ponto.

3.3 Notas e exercícios complementares sobre curvas e sua parametrização

Comprimento de arco. Seja $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ o vector posição sobre uma curva γ, parametrizado por $t \in [0, A]$.

O comprimento de arco sobre a curva, medido desde $\zeta = 0$ até $\zeta = t$, é

$$s(t) = \int_0^t \left\|\overset{\bullet}{\overrightarrow{r}}(\zeta)\right\| \, d\zeta = \int_0^t \sqrt{\overset{\bullet}{x}^2(\zeta) + \overset{\bullet}{y}^2(\zeta) + \overset{\bullet}{z}^2(\zeta)} \, d\zeta.$$

Exemplo 1. Seja a hélice

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & r\cos t \\ y(t) & = & r\sin t \\ z(t) & = & a\,t \end{array}\right., \ t \in [0, A],$$

obtém-se $\overset{\bullet}{\overrightarrow{r}}(\zeta)$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \overset{\bullet}{x}(t) & = & -r\sin t \\ \overset{\bullet}{y}(t) & = & r\cos t \\ \overset{\bullet}{z}(t) & = & a \end{array}\right., \ t \in [0, A],$$

E logo $\sqrt{\overset{\bullet}{x}^2(\zeta) + \overset{\bullet}{y}^2(\zeta) + \overset{\bullet}{z}^2(\zeta)} = \sqrt{(-r\sin\zeta)^2 + (r\cos\zeta)^2 + a^2} = \sqrt{r^2 + a^2}$. Assim o comprimento de arco é

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{r^2 + a^2} \, d\zeta = t\,\sqrt{r^2 + a^2}.$$

Representação canónica. Nesta representação utiliza-se o comprimento de arco como parâmetro na representação paramétrica da curva. Dada uma parametrização calcula-se $s = s(t)$, resolve-se para $t = t(s)$ (inverte-se) e substitui-se t como função de s na representação original.

Exemplo 1. (continuação) Neste caso s como função de t é

$$s(t) = t\ \sqrt{r^2 + a^2},$$

ou seja, invertendo

$$t(s) = \frac{s}{\sqrt{r^2 + a^2}}.$$

Substitui-se nas equações paramétricas e obtém-se $\overrightarrow{r}(s)$, o vector posição sobre a curva γ cujas coordenadas são

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(s) & = & r\cos\frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}} \\ y(s) & = & r\sin\frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}} \\ z(s) & = & \frac{a\ s}{\sqrt{r^2+a^2}} \end{array} \right. ,\ s \in [0, L],$$

em que $L = s(A)$ é o comprimento total da curva.

Vector tangente unitário. Derivando a parametrização $\overrightarrow{r}(s)$ em ordem a s obtemos o vector tangente unitário $\overrightarrow{t}(s) = \overrightarrow{r}'(s)$.

Exemplo 1 (cont.). Na curva γ o vector tangente unitário é dado por

$$\left\{ \begin{array}{lcl} t_x(s) = x'(s) & = & -\frac{r}{\sqrt{r^2+a^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}} \\ t_y(s) = y'(s) & = & \frac{r}{\sqrt{r^2+a^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}} \\ t_z(s) = z'(s) & = & \frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}} \end{array} \right. ,\ s \in [0, L].$$

Exercício 5. Verifique que $\overrightarrow{t}(s)$, no exemplo considerado, é unitário.

Vector normal principal e primeira fórmula de Frenet-Serret. Obtém-se o vector normal à curva derivando $\overrightarrow{t}(s)$ em ordem a s; no entanto, em geral, este vector não é unitário, para obter o vector unitário normal à curva $\overrightarrow{n}(s)$, ou vector normal principal, recorremos à expressão

$$\overrightarrow{n}(s) = \frac{\overrightarrow{t}'(s)}{\left\|\overrightarrow{t}'(s)\right\|} = \frac{\overrightarrow{r}''(s)}{\|\overrightarrow{r}''(s)\|}.$$

A quantidade $\kappa(s) = \left\|\overrightarrow{t}'(s)\right\| = \|\overrightarrow{r}''(s)\|$ tem um papel muito importante na teoria das curvas, é a curvatura de γ em s. A expressão da normal principal pode escrever-se

$$\overrightarrow{n}(s) = \frac{\overrightarrow{t}'(s)}{\kappa(s)},$$

que é a primeiro fórmula de Frenet-Serret, usualmente escrita $\overrightarrow{t}'(s) = \kappa(s)\ \overrightarrow{n}(s)$.

Exemplo 1 (cont.). Na curva γ o vector normal unitário é obtido derivando o vector $\overrightarrow{t}(s)$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x''(s) & = & -\frac{r}{r^2+a^2}\cos\frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}} \\ y''(s) & = & -\frac{r}{r^2+a^2}\sin\frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}} \\ z''(s) & = & 0 \end{array} \right. ,\ s \in [0, L].$$

O vector $\left(x''(s), y''(s), z''(s)\right)$ tem a norma $\kappa(s)$:

$$\begin{aligned}
\kappa(s) &= \sqrt{\left(x''(s)\right)^2 + \left(y''(s)\right)^2 + \left(z''(s)\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(-\frac{r}{r^2+a^2}\cos\frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}}\right)^2 + \left(-\frac{r}{r^2+a^2}\sin\frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{r}{r^2+a^2}\right)^2} \\
&= \frac{r}{r^2+a^2},
\end{aligned}$$

que é a curvatura (constante) da hélice circular.

A normal principal, $\overrightarrow{n}(s) = \frac{\overrightarrow{t}'(s)}{\|\overrightarrow{t}'(s)\|}$, tem representação

$$\left\{\begin{array}{lcl} n_x(s) &=& -\cos\frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}} \\ n_y(s) &=& -\sin\frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}} \\ n_z(s) &=& 0 \end{array}\right. , \ s \in [0, L].$$

Binormal e segunda fórmula de Frenet-Serret. O vector binormal unitário $\overrightarrow{b}(s)$ é ortogonal aos vectores tangente $\overrightarrow{t}(s)$ e normal principal $\overrightarrow{n}(s)$. É obtido muito simplesmente recorrendo ao produto externo de $\overrightarrow{t}(s)$ e de $\overrightarrow{n}(s)$

$$\overrightarrow{b}(s) = \overrightarrow{t}(s) \times \overrightarrow{n}(s).$$

Os três vectores: $\overrightarrow{t}(s), \overrightarrow{n}(s)$ e $\overrightarrow{b}(s)$ formam um triedro ordenado.

A torção é obtida a partir da segunda fórmula de Frenet-Serret

$$\overrightarrow{b}'(s) = -\tau(s)\ \overrightarrow{n}(s).$$

Exemplo 1 (cont.). Cálculo da binormal para a hélice circular:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{b}(s) &= \overrightarrow{t}(s) \times \overrightarrow{n}(s) \\
&= \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}} \begin{bmatrix} r\sin\frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}} \\ r\cos\frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}} \\ a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\cos\frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}} \\ -\sin\frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}} \begin{bmatrix} a\sin\frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}} \\ -a\cos\frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}} \\ r \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

A torção é obtida recorrendo apenas a uma coordenada da segunda fórmula de Frenet-Serret, $\overrightarrow{b}'(s) = \tau(s)\ \overrightarrow{n}(s)$, usando primeira coordenada

$$b'_x(s) = \frac{a}{r^2+a^2}\cos\frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}},$$

esta grandeza terá de igualar $-\tau(s)\ n_x(s)$, ou seja

$$\frac{a}{r^2+a^2}\cos\frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}} = -\tau(s)\ \left(-\cos\frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}}\right)$$

de onde se conclui que

$$\tau(s) = \frac{a}{r^2 + a^2}.$$

Nota - é evidente que qualquer coordenada da 2^a equação de Frenet-Serret serve para calcular a torção.

Exercício 6. Calcular a torção recorrendo à 2^a coordenada, $b_y(s)$, da binormal e à 2^a coordenada da normal, $n_y(s)$.

Terceira fórmula de Frenet-Serret. A terceira fórmula de Frenet-Serret relacciona todas as grandezas importantes no estudo de curvas, pode ser utilizada para confirmar cálculos ou quando uma das grandezas é difícil de obter sabendo todas as outras:

$$\overrightarrow{n}'(s) = -\kappa(s)\ \overrightarrow{t}(s) + \tau(s)\ \overrightarrow{b}(s).$$

Exercício 7. Confirmar a terceira fórmula de Frenet-Serret para a hélice circular.

Exercício 8. Seja uma escada de caracol que vence uma altura de $3m$. Pretende-se um espelho por degrau de $20cm$. A escada desenvolve-se em torno de um pilar com $1m$ de raio e tem $2m$ de raio exterior. Calcule:

a) O número de degraus.

b) A constante a.

c) O cobertor interior e exterior de cada degrau.

d) A curvatura interior e exterior das hélices que limitam a escada.

e) A torção interior e exterior das hélices que limitam a escada.

Que conclusões tira? A escada é confortável e segura para o utilizador?

Ficha 4

4 Integrais duplos e triplos.

4.1 Integrais duplos

Exemplo 2 *Calcule o integral duplo*

$$\iint_R (x^2y + 2y^3x)dxdy, \text{ com } R = [0,1] \times [-1,0]\,.$$

Sabemos que

$$\iint_R (x^2y+2y^3x)dxdy = \int_{-1}^{0}\left(\int_0^1 (x^2y+2y^3x)dx\right)dy = \int_0^1\left(\int_{-1}^{0}(x^2y+2y^3x)dy\right)dx.$$

Assim, porque

$$\int_0^1 (x^2y+2y^3x)dx = \left[x^2y+2y^3x\right]_0^1 = \left(\frac{y}{3}+y^3\right) - 0 = \frac{y}{3}+y^3,$$

obtemos

$$\begin{aligned}\iint_R (x^2y+2y^3x)dxdy &= \int_{-1}^{0}\left(\int_0^1 (x^2y+2y^3x)dx\right)dy \\ &= \int_{-1}^{0}\left(\frac{y}{3}+y^3\right)dy \\ &= \left[\frac{y^2}{6}+\frac{y^4}{4}\right]_{-1}^{0} \\ &= 0-\frac{1}{6}-\frac{1}{4} = -\frac{5}{12}.\end{aligned}$$

Alternativamente, porque

$$\int_{-1}^{0}(x^2y+2y^3x)dy = \left[\frac{x^2y^2}{2}+\frac{2xy^4}{4}\right]_{-1}^{0} = 0-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right) = -\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2},$$

obtemos

$$\begin{aligned}\iint_R (x^2y+2y^3x)dxdy &= \int_0^1\left(\int_{-1}^{0}(x^2y+2y^3x)dy\right)dx \\ &= \int_0^1\left(-\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right)dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{4}\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{6}-\frac{1}{4} = -\frac{5}{12}.\end{aligned}$$

Exercício 1. Calcule os integrais duplos:

a) $\displaystyle\iint_R (3x^2y+8xy^3+2)dxdy$, com $R=[0,1]\times[0,1]$.

b) $\displaystyle\iint_R (12xy^5 + 3y^{-1})dxdy$, com $R = [-1, 1] \times [1, 2]$.

c) $\displaystyle\iint_R \cos(x + y)dxdy$, com $R = [0, \pi] \times [0, \pi]$.

d) $\displaystyle\iint_R (xye^{x+y})dxdy$, com $R = [0, 1] \times [-1, 0]$.

Exemplo 3

Calcular o volume do sólido

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [0, 1] \wedge y \in [0, 2] \wedge 0 \leq z \leq e^{x+y}\right\}.$$

Consideremos a função $f : [0, 1] \times [0, 2] \to \mathbb{R}^+$*, definida por* $f(x, y) = e^{x+y}$*. Note que* S *é o conjunto dos pontos do espaço que ficam por baixo do gráfico de* f*. Logo teremos*

$$\mathit{Volume}(S) = \iint_R f(x, y)dxdy, \text{ com } R = [0, 1] \times [0, 2],$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\mathit{Volume}(S) &= \int_0^1 \left(\int_0^2 e^{x+y}dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\left[e^{x+y}\right]_0^2\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(e^{x+2} - e^x\right) dx \\
&= \left[e^{x+2} - e^x\right]_0^1 \\
&= \left(e^3 - e\right) - \left(e^2 - 1\right) = e^3 - e^2 - e + 1.
\end{aligned}$$

Alternativamente, teríamos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol\,me}(S) &= \int_0^2 \left(\int_0^1 e^{x+y}dx\right) dy \\
&= \int_0^2 \left(\left[e^{x+y}\right]_0^1\right) dy \\
&= \int_0^2 \left(e^{1+y} - e^y\right) dy \\
&= \left[e^{1+y} - e^y\right]_0^2 \\
&= \left(e^3 - e^2\right) - (e - 1) = e^3 - e^2 - e + 1.
\end{aligned}$$

Exercício 2 Calcule o volume do sólido S definido por:

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq x^2 + y^2\right\}.$$

Exercício 3 Calcule o volume do sólido S definido por:

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1 \wedge x^3 + y^3 \leq z \leq x^2 + y^2\right\}.$$

Exemplo 4 *Calcule o integral*

$$\iint_S xydxdy, \text{ com } S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 \leq y \leq x\right\}.$$

Sabemos que

$$\iint_S xydxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^3}^x xydy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt[3]{y}} xydx\right) dy.$$

Assim, porque

$$\int_{x^3}^x xydy = \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{x^3}^x = \frac{x^3}{2} - \frac{x^7}{2},$$

temos

$$\begin{aligned}
\iint_S xydxdy &= \int_0^1 \left(\int_{x^3}^x xydy\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^7}{2}\right) dx \\
&= \left[\frac{x^4}{8} - \frac{x^8}{16}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - 0 = \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

Alternativamente temos

$$\int_y^{\sqrt[3]{y}} xydx = \left[\frac{yx^2}{2}\right]_y^{\sqrt[3]{y}} = \frac{y^{\frac{5}{3}}}{2} - \frac{y^3}{2},$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\iint_S xydxdy &= \int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt[3]{y}} xydx\right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{y^{\frac{5}{3}}}{2} - \frac{y^3}{2}\right) dy \\
&= \left[\frac{3y^{\frac{8}{3}}}{16} - \frac{y^4}{8}\right]_0^1 \\
&= \frac{3}{16} - \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

Exercício 4 Calcule o integral $\displaystyle\iint\limits_S (x^2 + y^2)dxdy$ quando:

a) $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x\right\}$;
b) $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge x^3 \leq y \leq x^2\right\}$;
c) $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq x \leq y^3\right\}$.

Exemplo 5 *Calcule, mediante uma mudança de variáveis adequada, o integral*

$$\iint_S (x^2+y^2)dxdy, \text{ com } S = \left\{(x,y) \in (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\right\}.$$

Consideremos a transformação $T : [0,+\infty] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$*, definida por*

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Sabemos que

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \int\int_{T^{-1}(S)} f(T(r,\theta)).\left|\det(DT(r,\theta))\right| drd\theta,$$

onde

$$\begin{aligned} T^{-1}(S) &= \{(r,\theta) \in [0,+\infty] \times [0,2\pi] : T(r,\theta) \in S\} \\ &= \{(r,\theta) \in [0,+\infty] \times [0,2\pi] : (r\cos\theta, r\sin\theta) \in S\} \\ &= \left\{(r,\theta) \in [0,+\infty] \times [0,2\pi] : (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 \leq 4\right\} \\ &= \left\{(r,\theta) \in [0,+\infty] \times [0,2\pi] : r^2 \leq 4\right\} \\ &= [0,2] \times [0,2\pi], \end{aligned}$$

e

$$\det(DT(r,\theta)) = \det\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r(\cos\theta)^2 + r(\sin\theta)^2 = r.$$

Assim, porque $f(x,y) = x^2+y^2$*, temos* $f(T(r,\theta)) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^2$*, e portanto*

$$\begin{aligned} \iint_S (x^2+y^2)dxdy &= \int\int_{[0,2]\times[0,2\pi]} f(T(r,\theta)).\left|\det(DT(r,\theta))\right| drd\theta \\ &= \int\int_{[0,2]\times[0,2\pi]} r^2\left|r\right| drd\theta \\ &= \int_0^2 (\int_0^{2\pi} r^3 d\theta)dr \\ &= \int_0^2 2\pi r^3 dr \\ &= 8\pi. \end{aligned}$$

Exercício 5 Mediante uma mudança de variáveis adequada, calcule:

a) $\iint_S xdxdy$, com $S = \left\{(x,y) \in (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\right\}$.

b) $\iint_S \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, com $S = \left\{(x,y) \in (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \text{ e } x^2+y^2 \leq 1\right\}$.

c) $\iint_S e^{x^2+y^2}dxdy$, com $S = \left\{(x,y) \in (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \ x^2+y^2 \leq 4\right\}$.

Exemplo 6 *Seja $S = [0,1] \times [0,1]$ uma placa bidimensional com densidade de massa $f(x,y) = e^{x+y}$. Calcular a massa e o centro de massa de S.*

Sabemos que a massa da placa, e as coordenadas do seu centro de massa, (c_1, c_2), são dadas por

$$massa(S) = \iint\limits_S f(x,y)dxdy, \; c_1 = \frac{\iint\limits_S xf(x,y)dxdy}{massa(S)}, \; c_2 = \frac{\iint\limits_S yf(x,y)dxdy}{massa(S)}.$$

Logo, das igualdades:

$$\iint\limits_S f(x,y)dxdy == \int_0^1 (\int_0^1 e^{x+y}dy)dx = (e-1)^2,$$

$$\iint\limits_S xf(x,y)dxdy = \int_0^1 (\int_0^1 xe^{x+y}dy)dx = e-1,$$

e

$$\iint\limits_S yf(x,y)dxdy = \int_0^1 (\int_0^1 ye^{x+y}dy)dx = e-1,$$

obtemos

$$massa(S) = (e-1)^2 \;\text{ e } c_1 = c_2 = \frac{e-1}{(e-1)^2} = \frac{1}{e-1}.$$

4.2 Integrais triplos

Exemplo 7 *Calcular o integral triplo*

$$\iiint_P (x+y+z)dxdydz, \text{ com } P = [0,1] \times [-1,1] \times [-1,0].$$

Recorde que o cálculo de um integral triplo pode reduzir-se ao cálculo de um integral duplo. Mais precisamente, se considerarmos as funções $a : R_1 = [0,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$, $b : R_2 = [0,1] \times [-1,0] \to \mathbb{R}$, $c : R_3 = [-1,1] \times [-1,0] \to \mathbb{R}$, definidas respectivamente por

$$a(x,y) = \int_{-1}^0 (x+y+z)\,dz, \; b(x,z) = \int_{-1}^1 (x+y+z)\,dy, \; c(y,z) = \int_0^1 (x+y+z)\,dx,$$

então temos

$$\iiint_P (x+y+z)dxdydz = \iint_{R_1} a(x,y)dxdy = \iint_{R_2} b(x,z)dxdz = \iint_{R_3} c(y,z)dydz.$$

Assim, porque

$$a(x,y) = \int_{-1}^0 (x+y+z)\,dz = \left[xz + yz + \frac{z^2}{2}\right]_{-1}^0 = 0 - \left(-x - y + \frac{1}{2}\right) = x + y - \frac{1}{2},$$

vem

$$\begin{aligned}
\iiint_P (x+y+z)dxdydz &= \iint_{R_1} a(x,y)dxdy \\
&= \iint_{R_1} \left(x+y-\frac{1}{2}\right) dxdy \\
&= \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 \left(x+y-\frac{1}{2}\right) dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\left[xy+\frac{y^2}{2}-\frac{y}{2}\right]_{-1}^1\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\left(x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)-\left(-x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\right) dx \\
&= \int_0^1 (2x-1)\, dx \\
&= \left[x^2-x\right]_0^1 \\
&= (1-1)-0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Alternativamente, podíamos calcular

$$c(y,z) = \int_0^1 (x+y+z)\, dx = \left[\frac{x^2}{2}+xy+xz\right]_0^1 = \frac{1}{2}+y+z-0,$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\iiint_P (x+y+z)dxdydz &= \iint_{R_3} c(y,z)dydz \\
&= \iint_{R_3} \left(\frac{1}{2}+y+z\right) dydz \\
&= \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^0 \left(\frac{1}{2}+y+z\right) dz\right) dy \\
&= \int_{-1}^1 \left(\left[\frac{z}{2}+yz+\frac{z^2}{2}\right]_{-1}^0\right) dy \\
&= \int_{-1}^1 \left(0-\left(-\frac{1}{2}-y+\frac{1}{2}\right)\right) dy \\
&= \int_{-1}^1 ydy \\
&= \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^1 \\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

como anteriormente.

Exercício 6. Calcule os integrais triplos:

a) $\iiint\limits_P (xyz)dxdydz$, com $P = [-1,0] \times [0,1] \times [-1,1]$.

b) $\iiint\limits_P e^{x+y+z}dxdydz$, com $P = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

c) $\iiint\limits_P \cos(x+y+z)dxdydz$, com $P = [0,2\pi] \times [0,\pi] \times [-\pi,0]$.

Exemplo 8 *Calcular o integral*

$$\iiint_S (x+y+2z)dxdydz, \; com \; S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \;\; e \; 0 \leq z \leq x^2+1\right\}.$$

Note que neste caso o domínio de integração, S, não é um paralelipípedo. Se considererarmos um paralelipípedo P que contenha S, seja por exemplo $P = [0,1] \times [0,1] \times [0,2]$, temos

$$\iiint_S (x+y+z)dxdydz = \iiint_P \tilde{f}(x,y,z)dxdydz,$$

onde $\tilde{f} : P = [0,1] \times [0,1] \times [0,2] \to \mathbb{R}$ está definida por

$$\tilde{f}(x,y,z) = \begin{cases} x+y+z \;\; se \; (x,y,z) \in S \\ 0 \;\; se \; (x,y,z) \in P \;\; e \; (x,y,z) \notin S \end{cases}.$$

Para calcular o integral

$$\iiint_P \tilde{f}(x,y,z)dxdydz,$$

podemos considerar a função $a : R = [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por

$$\begin{aligned} a(x,y) &= \int_0^2 \tilde{f}(x,y,z)dz \\ &= \int_0^{x^2+1} (x+y+2z)\,dz \\ &= \left[xz+yz+z^2\right]_0^{x^2+1} \\ &= \left(x\left(x^2+1\right)+y\left(x^2+1\right)+\left(x^2+1\right)^2\right)-0 \\ &= x^4+x^3+yx^2+2x^2+x+y+1. \end{aligned}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned}
\iiint_P \tilde{f}(x,y,z)dxdydz &= \iint_R a(x,y)dxdy \\
&= \iint_R (x^4+x^3+yx^2+2x^2+x+y+1)dxdy \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 (x^4+x^3+yx^2+2x^2+x+y+1)dx\right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\left[\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{yx^3}{3}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+xy+x\right]_0^1\right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{y}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+y+1\right)-0\right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{4}{3}y+\frac{157}{60}\right) dy \\
&= \left[\frac{2}{3}y^2+\frac{157y}{60}\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{3}+\frac{157}{60}.
\end{aligned}$$

Exercício 7 Calcular o integral

$$\iiint_S xdxdydz, \text{ com } S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in[0,1]\times[0,1] \text{ e } 0\le z\le x+1\right\}.$$

Exercício 8 Calcular o integral

$$\iiint_S ydxdydz, \text{ com } S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in[0,1]\times[0,1] \text{ e } y^3+1\le z\le y^2+1\right\}.$$

Ficha 5

5 Integrais de linha e integrais de superfície.

5.1 Integrais de linha

Exemplo 1 Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o campo escalar definido por $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$, e $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ o caminho definido por $c(t) = (\cos(t), \sin(t), 2t)$. Pretende-se calcular o integral de linha de f ao longo de c.

Recorde que o integral de linha de um campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ao longo de um caminho $c : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ representa-se por

$$\int_c f ds$$

e define-se por

$$\int_c f ds = \int_a^b f(c(t)) \left\| c'(t) \right\| dt.$$

Neste caso concreto temos:

$$c'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 2), \ \left\| c'(t) \right\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 4} = \sqrt{5}, \text{ para } t \in [0, 2\pi]$$

e

$$f(c(t)) = f(\cos(t), \sin(t), 2t) = \cos^2(t) + \sin^2(t) + 2t = 1 + 2t, \text{ para } t \in [0, 2\pi].$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_c f ds &= \int_0^{2\pi} f(c(t)) \left\| c'(t) \right\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1+2t) \sqrt{5} dt \\ &= \sqrt{5} \left[\left(t + t^2 \right) \right]_0^{2\pi} = \sqrt{5} \left(2\pi + 4\pi^2 \right). \end{aligned}$$

Exercício 1 Calcule o integral de linha do campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ao longo do caminho $c : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ quando:

a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ e $c(t) = (\sin(t), \cos(t), t)$ com $t \in [0, 2\pi]$. Solução: $\pi\sqrt{2}\left(2 + \frac{8}{3}\pi^2\right)$.

b) $f(x,y,z) = x + y + z$ e $c(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ com $t \in [0, 2\pi]$. Solução: $2\pi^2\sqrt{2}$.

c) $f(x,y,z) = x\cos(z)$ e $c(t) = (t, t^2, 0)$ com $t \in [0,1]$. Solução: $\frac{5}{12}\sqrt{5} - \frac{1}{12}$.

Exemplo 2 Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o campo vectorial definido por $F(x,y,z) = (x, -y, z)$, e $c : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$ o caminho definido por $c(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$. Pretende-se calcular o integral de linha de F ao longo de c.

Recorde que o integral de linha de um campo escalar $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ao longo de um caminho $c : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ representa o trabalho realizado pelo campo F quando uma partícula percorre o caminho c. Este integral denota-se por

$$\int_c F.ds$$

e define-se por

$$\int_c F.ds = \int_a^b F(c(t)).c'(t) dt.$$

Neste caso concreto temos:

$$c'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0),\ F(c(t)) = F(\cos(t), \sin(t), 0) = (\cos(t), -\sin(t), 0), \text{ para } t \in [0, \pi/2]\,,$$

e portanto

$$\begin{aligned} F(c(t)).c'(t) &= (\cos(t), -\sin(t), 0).(-\sin(t), \cos(t), 0) \\ &= -\cos(t)\sin(t) - \sin(t)\cos(t) + 0 \\ &= -2\cos(t)\sin(t) \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_c F.ds &= \int_0^\pi F(c(t)).c'(t)dt \\ &= \int_0^\pi -2\cos(t)\sin(t)dt \\ &= \left[\cos^2(t)\right]_0^{\pi/2} = \cos^2(\pi/2) - \cos^2(0) = -1. \end{aligned}$$

Exercício 2 Calcule o integral de linha do campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ao longo do caminho $c : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ quando:

a) $F(x, y, z) = \big(x^2, xy, 1\big)$, $c(t) = (t, t^2, 1)$ com $t \in [0, 1]$. Solução: $\frac{11}{15}$.
b) $F(x, y, z) = (\cos(z), e^x, e^y)$, $c(t) = (1, t, e^t)$ com $t \in [0, 2]$. Solução: $2e + \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}$.
c) $F(x, y, z) = (x, y, z)$, $c(t) = (\sin(t), \cos(t), t)$ com $t \in [0, 2\pi]$. Solução: $2\pi^2$.

Exemplo 3 Considere o campo vectorial $F(x, y, z) = (yz\cos(xyz), xz\cos(xyz), xy\cos(xyz))$.

a) Mostre que existe $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\phi = F$.
b) Calcule o integral de linha de F ao longo do caminho $c(t) = (\sin(t), 2\sin(t)e^{t-\pi/2}, t^2/\pi)$, $t \in [0, \pi/2]$.

a) Determinemos $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\phi = F$. Por outras palavras pretendemos determinar a solução $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ do sistema de equações

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\phi}{\partial x}(x, y, z) = yz\cos(xyz) \\ \frac{\partial\phi}{\partial y}(x, y, z) = xz\cos(xyz) \\ \frac{\partial\phi}{\partial z}(x, y, z) = xy\cos(xyz) \end{array} \right. . \tag{1}$$

Porque

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x, y, z) = yz\cos(xyz) \Leftrightarrow \phi(x, y, z) = \sin(xyz) + c(y, z)$$

vemos que $\phi(x, y, z) = \sin(xyz) + c(y, z)$ é solução do sistema (1) se e só se $c(y, z)$ é tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} xz\sin(xyz) + \frac{\partial c}{\partial y}(y, z) = xz\cos(xyz) \\ xy\sin(xyz) + \frac{\partial c}{\partial z}(y, z) = xy\cos(xyz) \end{array} \right. \text{ ou ainda } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial c}{\partial y}(y, z) = 0 \\ \frac{\partial c}{\partial z}(y, z) = 0 \end{array} \right. .$$

Isto significa que existem soluções de (1) e todas elas são da forma

$$\phi(x, y, z) = \sin(xyz) + c, \text{ onde } c \text{ designa uma constante real.}$$

b) Na alínea anterior ficou demonstrado que o campo escalar $\phi(x,y,z) = \sin(xyz)$ é tal que

$$\nabla\phi = F.$$

Podemos então recorrer à igualdade

$$\int_c F.ds = \phi(c(b)) - \phi(c(a)),$$

válida para qualquer caminho $c : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, para calcular o integral pretendido. Porque

$$c(t) = (\sin(t), 2\sin(t)e^{t-\pi/2}, t^2/\pi), \text{ com } t \in [0, \pi/2],$$

temos

$$c(0) = (0,0,0) \text{ e } c(\pi/2) = (1,2,\pi/4),$$

consequentemente

$$\begin{aligned} \int_c F.ds &= \phi(c(\pi/2)) - \phi(c(0)) \\ &= \phi(1,2,\pi/4) - \phi(0,0,0) \\ &= \sin(\pi/2) - \sin(0) = 1. \end{aligned}$$

Exercício 3 Considere o campo vectorial $F(x,y,z) = (y,x,0)$.
a) Mostre que existe $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\phi = F$. Solução: $\phi(x,y,z) = xy + c$.
b) Calcule o integral de linha de F ao longo do caminho $c(t) = (t^4/4, \sin^3(t\pi/2), 0)$, $t \in [0,1]$.
Solução: $\frac{1}{4}$.

Exercício 4 Considere o campo vectorial $F(x,y,z) = \left(2xyz, x^2z, x^2y\right)$.
a) Mostre que existe $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\phi = F$. Solução: $\phi(x,y,z) = x^2yz + c$.
b) Calcule o integral linha de F ao longo de um caminho com ponto inicial $(1,1,1)$ e ponto final $(1,2,4)$.
Solução: 7.

Exercício 5 Considere o campo gravitacional

$$F(x,y,z) = -\left(\frac{GMx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{GMy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{GMz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right),$$

onde G e M designam constantes positivas.
a) Mostre que existe $\phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\phi = F$. Solução: $\phi(x,y,z) = c + GM/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
b) Mostre que o trabalho realizado por F ao longo de um caminho com início em (x_1,y_1,z_1) e fim em (x_2,y_2,z_2) apenas depende de $\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$ e $\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}$.

5.2 Integrais de superfície

Exemplo 4. Considere a superfície

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \wedge x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

Pretende-se calcular a área de S, e a massa que esta superfície teria se a sua densidade de massa fosse dada por $f(x, y, z) = 4z + 1$.

Comecemos por recordar que se

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & [a,b] \times [c,d] & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \rightarrow & (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)) \end{array}$$

é uma parametrização de S então a área de S é dada por

$$\text{Área}(S) = \int_a^b \int_c^d \|T_u(u,v) \times T_v(u,v)\| \, dvdu, \tag{2}$$

onde $T_u(u,v) \times T_v(u,v)$ denota o produto externo dos vectores tangentes à superfície

$$T_u(u,v) = \left(\frac{\partial X}{\partial u}(u,v), \frac{\partial Y}{\partial u}(u,v), \frac{\partial Z}{\partial u}(u,v)\right) \text{ e } T_v(u,v) = \left(\frac{\partial X}{\partial v}(u,v), \frac{\partial Y}{\partial v}(u,v), \frac{\partial Z}{\partial v}(u,v)\right).$$

Recorde ainda que se $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ designa a densidade de massa da superfície, então a massa de S é dada pelo integral de f ao longo de S, ou seja

$$\begin{aligned} \text{Massa}(S) &= \iint_S f dS \qquad (3) \\ &= \int_a^b \int_c^d f(X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)) \|T_u(u,v) \times T_v(u,v)\| \, dvdu. \end{aligned}$$

Comecemos então por notar que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & [0,1] \times [0,2\pi] & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (r,\theta) & \rightarrow & \left(r\cos\theta, r\sin\theta, r^2\right) \end{array}$$

é uma parametrização de S. Os correspondentes vectores tangentes são dados por

$$T_r(r,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 2r) \text{ e } T_\theta(r,\theta) = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0),$$

tendo-se ainda

$$T_r(r,\theta) \times T_\theta(r,\theta) = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & 2r \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{bmatrix} = \left(-2r^2\cos\theta, -2r^2\sin\theta, r\right)$$

e

$$\|T_r(r,\theta) \times T_\theta(r,\theta)\| = \sqrt{4r^4 + r^2} = r\sqrt{4r^2 + 1}.$$

Podemos então concluir por (2) que

$$\begin{aligned}
\text{Área}(S) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \|T_r(r,\theta) \times T_\theta(r,\theta)\| \, d\theta dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\sqrt{4r^2+1} d\theta dr \\
&= \int_0^1 2\pi r\sqrt{4r^2+1} dr \\
&= \frac{\pi}{6}\left[\left(4r^2+1\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{5^3}-1\right).
\end{aligned}$$

Para calcular a massa basta ter em conta (3)

$$\begin{aligned}
\text{Massa}(S) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta, r^2\right) \|T_r(r,\theta) \times T_\theta(r,\theta)\| \, d\theta dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(4r^2+1\right) r\sqrt{4r^2+1} d\theta dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\left(4r^2+1\right)^{3/2} d\theta dr \\
&= \int_0^1 2\pi r\left(4r^2+1\right)^{3/2} dr \\
&= \frac{2\pi}{8}\int_0^1 8r\left(4r^2+1\right)^{3/2} dr \\
&= \frac{\pi}{4}\left[\frac{\left(4r^2+1\right)^{5/2}}{5/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}\left(10\sqrt{5}-\frac{2}{5}\right).
\end{aligned}$$

Exercício 6 Sabendo que uma superfície cónica é parametrizada por $\Phi : [0,3] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, com $\Phi(r,\theta) = (\frac{2}{3}r\cos(\theta), \frac{2}{3}r\sin(\theta), r)$, calcule:
 a) Represente numa figura a superfície.
 b) A área da superfície S. Solução: $\sqrt{52}\pi$
 c) A massa da superfície S se esta tiver densidade de massa dada por $f(x,y,z) = z$. Solução: $4\sqrt{13}\pi$.

Exercício 7 Considere a calote esférica $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4 \wedge z \geq 0\right\}$.

Sabendo que esta superfície é parametrizada por $\Phi : [0,\pi/2] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, com

$$\Phi(\theta,\phi) = (2\sin(\theta)\cos(\phi), 2\sin(\theta)\sin(\phi), \, 2\cos(\theta)),$$

calcule:
 a) A área da superfície S.
 b) A massa da superfície S se esta tiver densidade de massa dada por $f(x,y,z) = z$.
 Res. a) É necessário calcular

$$\iint_S dS.$$

Devido à simetria esférica do problema utiliza-se o sistema de coordenadas esféricas,

$$\begin{cases} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta. \end{cases}$$

A parametrização Φ da calote esférica será obtida fazendo, precisamente $r = 2$ nestas equações com $\theta \in [0, \pi/2]$ e $\phi \in [0, 2\pi]$. Os vectores tangentes à superfície serão (no caso de toda a parametrização de uma superfície esférica):

$$\begin{aligned} T_\theta(\theta,\phi) &= (r\cos\theta\cos\phi, r\cos\theta\sin\phi, -r\sin\theta) \\ T_\phi(\theta,\phi) &= (-r\sin\theta\sin\phi, r\sin\theta\cos\phi, 0), \end{aligned}$$

o produto vectorial fundamental é:

$$P(\theta,\phi) = T_\theta(\theta,\phi) \times T_\phi(\theta,\phi) = \begin{bmatrix} r\cos\theta\cos\phi \\ r\cos\theta\sin\phi \\ -r\sin\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -r\sin\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^2\sin^2\theta\cos\phi \\ r^2\sin^2\theta\sin\phi \\ r^2\cos\theta\sin\theta \end{bmatrix},$$

cuja norma é

$$\|T_\theta(\theta,\phi) \times T_\phi(\theta,\phi)\| = r^2\sin\theta$$

e que no nosso caso é $4\sin\theta$. O integral de área é

$$A = \iint_S dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin\theta d\theta d\phi = 2\pi.4.\left[-\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 8\pi,$$

o que é metade da área da esfera de raio 2 que seria 16π.

Res. b) Neste caso toda a mecânica do cálculo do integral é igual à da alínea a) mas agora com uma função integranda, que em coordenadas esféricas vale $z = f(\theta,\phi) = 2\cos\theta$. O integral é

$$\begin{aligned} M &= \iint_S f dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta 4\sin\theta d\theta d\phi = 8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\theta\cos\theta d\theta \\ &= 8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta = 8\pi\left[-\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 8\pi. \end{aligned}$$

5.3 Teoremas de Stokes e Gauss

Exercício 8 Considere a calote esférica $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \wedge z \geq 0\right\}$ e $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $F(x, y, z) = (y, -x, e^{zx})$.

a) Calcule o rotacional de F.

b) Sabendo que S é parametrizada por $\Phi : [0, \pi/2] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, com

$$\Phi(\theta,\phi) = (\sin(\theta)\cos(\phi), \sin(\theta)\sin(\phi), \cos(\theta)),$$

mostre que

$$\iint_S (\nabla \times F).\overrightarrow{dS} = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)\cos(\theta)\left(\sin(\theta)\cos(\phi)e^{\sin(\theta)\cos(\theta)\cos(\phi)} + 2\right) d\theta d\phi.$$

c) Conclua pelo teorema de Stokes que

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)\cos(\theta)\left(\sin(\theta)\cos(\phi)e^{\sin(\theta)\cos(\theta)\cos(\phi)}+2\right)d\theta d\phi = 2\pi.$$

Res a) $\nabla\times F(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y \\ -x \\ e^{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -ze^{zx} \\ -2 \end{bmatrix}.$

Res b) É necessário calcular $\nabla\times F$ sobre a superfície, ou seja, com a parametrização indicada:

$$\nabla\times F(\theta,\phi) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos\theta e^{\cos\theta\sin\theta\cos\phi} \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Recordamos que a parametrização utiliza de novo as coordenadas esféricas com $r=1$, logo o produto vectorial fundamental já foi calculado no exercício anterior,

$$\overrightarrow{dS} = \overrightarrow{n}dS = \overrightarrow{P(\theta,\phi)}d\theta d\phi = \begin{bmatrix} \sin^2\theta\sin\phi \\ \sin^2\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\theta \end{bmatrix} d\theta d\phi.$$

Assim

$$\begin{aligned}\iint_S (\nabla\times F).\overrightarrow{dS} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos\theta e^{\cos\theta\sin\theta\cos\phi} \\ -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \sin^2\theta\sin\phi \\ \sin^2\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\theta \end{bmatrix} d\theta d\phi \\ &= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta\left(\sin\theta\cos\phi e^{\cos\theta\sin\theta\cos\phi}+2\right)d\theta d\phi.\end{aligned}$$

Res c) O integral pedido é, como visto na alínea anterior:

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)\cos(\theta)\left(\sin(\theta)\cos(\phi)e^{\sin(\theta)\cos(\theta)\cos(\phi)}+2\right)d\theta d\phi = -\iint_S (\nabla\times F).\overrightarrow{dS}$$

Recordando o teorema de Stokes, uma vez que tanto F, como a circunferência de raio 1, estão nas condições do teorema

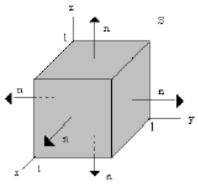
$$\oint_{\partial S} F.ds = \iint_S (\nabla\times F).\overrightarrow{dS}$$

Neste caso podemos utilizar qualquer superfície que seja circunscrita no sentido positivo pela circunferência. A superfície mais simples possível é o círculo unitário $S_1 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1 \wedge z=0\right\}$. A parametrização nem sequer é importante porque sobre esta superfície $\nabla\times F = (0,0,-2)$ e $\overrightarrow{dS} = \overrightarrow{n}dS = (0,0,1)\,dS$. Assim

$$\iint_{S_1} (\nabla\times F).\overrightarrow{n}dS = \iint_{S_1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dS = -2\iint_{S_1} dS = -2\pi,$$

porque a área do círculo unitário é π. O integral I é o simétrico de -2π. A resposta é $I = 2\pi$.

Exercício 9 Considere o campo vectorial $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definido por $F(x,y,z)=(0,0,z(z-1)e^{yx^2})$.



a) Calcule a divergência de F.

b) Mostre que se S é a superfície orientada representada na figura, então $\displaystyle\iint_S F.dS=0$.

b) Conclua pelo teorema de Gauss que

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (2z-1)\,e^{x^2y}dxdydz=0.$$

Ficha 6

6 Equações diferenciais.

Exercício 1 Determine a solução de cada um dos seguintes problemas:
a) $y' - \sin(x)y = 0$ e $y(0) = 1$. Solução: $y(x) = e^{1-\cos(x)}$
b) $y' + \left(x^2 + 1\right) y = 0$ e $y(0) = e$. Solução: $y(x) = e^{1-\frac{x^3}{3}-x}$
c) $e^x y' - y = 0$ e $y(0) = 1$. Solução: $y(x) = e^{1-e^{-x}}$
d) $y'/(\cos(x) + 2) - xy = 0$ e $y(0) = e^{-1}$. Solução: $y(x) = e^{x^2+x\sin x+\cos x-2}$

Exercício 2 Considere a equação diferencial linar não homogénea

$$y' + a(x)y = b(x), \tag{4}$$

onde $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ designam funções contínuas. Considere a função $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mu(x) = \exp(\int a\,(x)\,dx),$$

onde, como habitualmente, $\int a\,(x)\,dx$ designa uma primitiva de a.
a) Mostre que $(\mu y)' = \mu\,(y' + ay)$, para qualquer função diferenciável $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
b) Mostre que $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma solução de (4) se e só se μy é primitiva de μb.
c) Mostre que $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma solução de (4) se e só se existir uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$y = \frac{\int \mu\,(x)\,b\,(x)\,dx}{\mu\,(x)} + \frac{c}{\mu\,(x)}.$$

Exercício 3 Com base no exercício anterior, determine a solução de cada um dos seguintes problemas:
a) $y' + y = 1$ e $y(0) = 0$. Solução: $y(x) = 1 - e^{-x}$.
b) $y' + 2xy = x$ e $y(0) = 1$. Solução: $y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-x^2}$.
c) $y' + y = x$ e $y(0) = 0$. Solução: $y(x) = e^{-x} + x - 1$.

Exercício 4 Considere a equação diferencial

$$\cos(x) + 2yy' = 0. \tag{5}$$

a) Mostre que a equação é exacta.
b) Determine $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla.\phi(x, y) = (\cos(x), 2y)$.
c) Mostre que uma função diferenciável $y :]a, b[\to \mathbb{R}$ é solução de (5) se e só se a função

$$\begin{array}{ccc}]a,b[& \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \phi(x, y\,(x)) \end{array}$$

é constante.
d) Determine a única função $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que é solução de (5) e verifica $y(0) = 2$.

Solução: $y(x) = \sqrt{4 - \sin(x)}$.

Exercício 5 Considere a equação diferencial

$$2x + e^y y' = 0. \tag{6}$$

a) Mostre que a equação é exacta.
b) Determine $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla.\phi(x,y) = (2x, e^y)$.
c) Mostre que uma função diferenciável $y :]a,b[\to \mathbb{R}$ é solução de (6) se e só se a função

$$\begin{array}{ccc}]a,b[& \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \phi(x, y(x)) \end{array}$$

é constante.
d) Determine a única função $y :]-1,1[\to \mathbb{R}$ que é solução de (6) e verifica $y(0) = 0$.
Solução: $y(x) = \log(1 - x^2)$.

Exercício 6 Considere a equação diferencial

$$ye^{xy} - 1 + xe^{xy}y' = 0. \tag{7}$$

a) Mostre que a equação é exacta.
b) Determine $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla.\phi(x,y) = (ye^{xy} - 1, xe^{xy})$.
c) Mostre que uma função diferenciável $y :]a,b[\to \mathbb{R}$ é solução de (7) se e só se a função

$$\begin{array}{ccc}]a,b[& \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \phi(x, y(x)) \end{array}$$

é constante.
d) Determine a única função $y :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ que é solução de (7) e verifica $y(1) = 0$.
Solução: $y(x) = \log(x)/x$.

Exercício 7 Considere o sistema de equações diferenciais:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3y_1 - 4y_2 = y_1' \\ 2y_1 - 3y_2 = y_2' \end{array} \right. \tag{8}$$

a) Determine uma matriz diagonal D e uma matriz de mudança de P tais que

$$A = PDP^{-1}, \text{ com } A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

b) Calcule $\exp(xA)$.
c) Determine a única solução $(y_1(x), y_2(x))$ de (8) que verifica $(y_1(0), y_2(0)) = (1,1)$.

Solução: $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\exp(xA) = \begin{bmatrix} 2e^x - e^{-x} & -2e^x + 2e^{-x} \\ e^x - e^{-x} & -e^x + 2e^{-x} \end{bmatrix}$,
$(y_1(x), y_2(x)) = (e^{-x}, e^{-x})$.

Exercício 8 Considere o sistema de equações diferenciais

$$\left\{\begin{array}{l} 4y_1 - 2y_2 = y_1' \\ 3y_1 - y_2 = y_2' \end{array}\right. \tag{9}$$

a) Determine uma matriz diagonal D e uma matriz de mudança de P tais que

$$A = PDP^{-1}, \text{ com } A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Calcule $\exp(xA)$.
c) Determine a única solução $(y_1(x), y_2(x))$ de (9) que verifica $(y_1(0), y_2(0)) = (-1, 2)$.

Solução: $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\exp(xA) = \begin{bmatrix} -2e^x + 3e^{2x} & 2e^x - 2e^{2x} \\ -3e^x + 3e^{2x} & 3e^x - 2e^{2x} \end{bmatrix}$,
$(y_1(x), y_2(x)) = (6e^x - 7e^{2x}, 9e^x - 7e^{2x})$.

Exercício 9 Utilize o método da separação de variáveis para resolver os problemas:
a) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}$ e $u(0, x) = e^{2x} - e^{3x}$. Solução: $u(t, x) = e^{2t+2x} - e^{3t+3x}$.
b) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}$ e $u(t, 0) = 2e^{-2t} + 3e^t$. Solução: $u(t, x) = 2e^{-2t-2x} + 3e^{t+x}$.
c) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{\partial u}{\partial t}$ e $u(t, 0) = 2e^t + e^{-2t}$. Solução: $u(t, x) = 2e^{t+2x} + e^{-2t-4x}$.
d) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u$ e $u(0, x) = e^x - e^{2x}$. Solução: $u(t, x) = e^x - e^{t+2x}$.
e) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{\partial u}{\partial t} + 3u$ e $u(t, 0) = e^{-t} + 2e^{-t/2}$. Solução: $u(t, x) = e^{x-t} + 2e^{(4x-t)/2}$.

Ficha 7

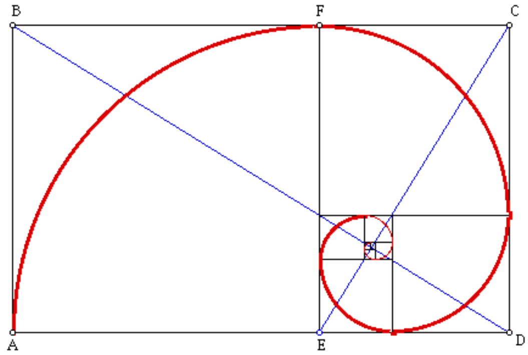
7 Complementos

Exercício 1

a) Desenhe com régua e esquadro um rectângulo dourado com base 10cm.

b) Desenhe uma espiral de razão dourada com compasso inscrita no rectângulo anterior.

c) Deduza a expressão para a razão dourada sabendo que quando se retira um quadrado com lados iguais à altura do rectângulo, o rectângulo remanescente mantém a mesma proporção entre a nova base (altura do rectângulo original) e a nova altura.



Exercício 2 Desenhe com régua e compasso um quadrado de lado l, a diagonal é $\sqrt{2}l$. Com este método obtenha as raízes de 3, 4 e 5.

Exercício 3

a) Sabendo que no início de um ano há 1 casal de coelhos recém nascidos e que estes se reproduzem dando origem a outro casal quando atingem 2 meses, reproduzindo-se então todos os meses, quantos casais de coelhos há ao fim de um ano?

b) Explique o que é uma sequência de Fibonacci. Dê dois exemplos de sequências de Fibonacci.

Exercício 4. Sabendo que o Modulor de Le Corbusier tem como base 183 cm para a sequência vermelha $\{M_v\,(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ e 2.26 para a sequência azul $\{M_a\,(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Sabendo que os termos das sequências satisfazem as relações recorrência

$$\begin{aligned} M_v\,(0) &= 1.829cm \\ M_v\,(n+1) &= \Phi\ M_v\,(n+1)\,,\ \text{em que } \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_a\,(0) &= 2.260cm \\ M_a\,(n+1) &= \Phi\ M_v\,(n+1)\,,\ \text{em que } \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \end{aligned}$$

calcule:

a) Uma tabela, elaborada da forma que quiser, (de preferência com gosto artístico como na figura de Le Corbusier anexa) em que sejam explícitos os termos da sequência azul $M_a\,(-5)\,,\ M_a\,(-4)\,,\ M_a\,(-3)\,,$ $M_a\,(-2)\,,\ M_a\,(-1)\,,\ M_a\,(0)\,,\ M_a\,(1)\,,\ M_a\,(2)\,,\ M_a\,(3)\,,\ M_a\,(4)\,,\ M_a\,(5)$ e da sequência vermelha $M_v\,(j)$, $j = -5,\ldots,0,\ldots 5$.

Exemplo de res.: $M_v(1) = \Phi \times M_v(0) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times 1.892$, $M_v(2) = \Phi^2 \times M_v(0) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \times 1.892$, $M_v(-1) = \Phi \times M_v(0) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} \times 1.892$.

b) Dê exemplos de objectos de utilização humana, e em particular na arquitectura, que se enquadrem nas dimensões fornecidas pelo Modulor de Le Corbusier.

c) Deduza uma fórmula geral para o Modulor de Le Corbusier.

d) Prove que o Modulor é uma sequência de Fibonacci.

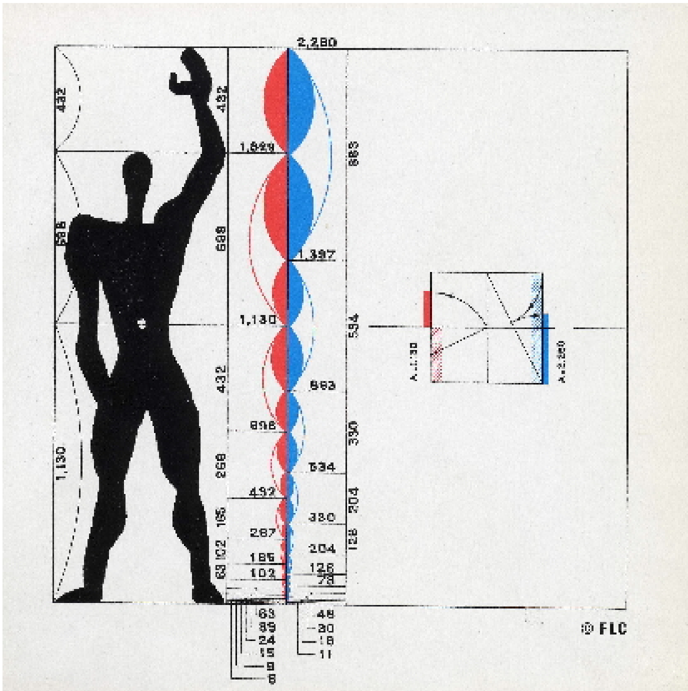


Tabela com elementos das "séries"vermelha e azul de Le Corbusier.

...	...
$\Phi^v_{-6} = 0.101940$	$\Phi^a_{-6} = 0.125961$
$\Phi^v_{-5} = 0.164938$	$\Phi^a_{-5} = 0.203805$
$\Phi^v_{-4} = 0.26687$	$\Phi^a_{-4} = 0.329757$
$\Phi^v_{-3} = 0.431796$	$\Phi^a_{-3} = 0.533547$
$\Phi^v_{-2} = 0.698645$	$\Phi^a_{-2} = 0.863279$
$\Phi^v_{-1} = 1.13041$	$\Phi^a_{-1} = 1.39679$
$\Phi^v_0 = 1.829$	$\Phi^a_0 = 2.26$
$\Phi^v_1 = 2.95932$	$\Phi^a_1 = 3.65668$
$\Phi^v_2 = 4.78818$	$\Phi^a_2 = 5.91651$
$\Phi^v_3 = 7.74728$	$\Phi^a_3 = 9.57291$
$\Phi^v_4 = 12.5351$	$\Phi^a_4 = 15.489$
...	...

8 Teste Tipo 1 de Matemática II - Resolução

1. Considere a seguinte função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 \sin(x_2), x_1^2 \cos(x_2), x_3^2)$.

   (a)
$$Df(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \sin(x_2) & x_1^2 \cos(x_2) & 0 \\ 2x_1 \cos(x_2) & -x_1^2 \sin(x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3 \end{bmatrix}.$$

   (b) $J(x_1, x_2, x_3) = \det Df(x_1, x_2, x_3) = -4x_1^3 x_3$

   (c) Para que o sistema
$$\begin{bmatrix} 2a_1 \sin(x_2) & a_1^2 \cos(a_2) & 0 \\ 2a_1 \cos(a_2) & -a_1^2 \sin(a_2) & 0 \\ 0 & 0 & 2a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
   tenha soluções diferentes de zero para todos os vectores (v_1, v_2, v_3) em $\boldsymbol{R}^3$ é necessário que $J(x_1, x_2, x_3) = 0$, por consequência, para além das soluções triviais, tem de se ter $-4a_1^3 a_3 = 0$, ou seja: no plano $a_1 = 0$ ou no plano $a_3 = 0$. Note-se que se $a_3 \neq 0 \Longrightarrow v_3 = 0$ e que se $a_1 \neq 0 \Longrightarrow v_1 = v_2 = 0$.

2. Problemas de extremos e polinómio de Taylor.

   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2 y^2.$

      i.
$$\begin{aligned} P(x, y) &= f(0,0) + f_x(0,0)\, x + f_y(0,0)\, y + \frac{f_{xx}(0,0)}{2!} x^2 + \frac{f_{yy}(0,0)}{2!} y^2 + f_{xy}(0,0)\, xy \\ &= 0 + 0 + 0 + x^2 + 2y^2 + 0. \end{aligned}$$

      ii. (1v.) Identifique e classifique o ponto $(0,0)$ de f.
      Como as primeiras derivadas se anulam e a matriz hessiana $H(0,0)$ é:
$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$
      logo definida positiva (tem valores próprios positivos), então $f(x, y)$ tem um mínimo local em $(0,0)$.

   (b) Como $h(x, y)$, uma função infinitamente diferenciável, não tem tem zeros da derivada no interior de $\mathbb{S}$, que é um conjunto compacto, os extremos encontram-se na fronteira. Como a função assume a mesma imagem sobre cada circunferência de raio r centrada na origem basta calcular $h(x, y)$ em $x^2 + y^2 = 6$, em que vale e^{-2} e em $x^2 + y^2 = 4$, em que vale 1, valor superior ao anterior. Assim h assume o seu máximo absoluto na circunferência $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$ e o seu mínimo absoluto é atingido na circunferência $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 6\}$.

   (a)
$$s(t) = \int_0^t \left\| \dot{c}(\xi) \right\| d\xi = \int_0^t \sqrt{16 + 9\sin^2(\xi) + 9\cos^2(\xi)}\, d\xi = 5t.$$
   Entre 0 e 2π será $s(2\pi) = 10\pi$.

i. Como $t = \frac{s}{5}$, teremos $\mathbf{c}(s) = (\frac{4s}{5}, 3\sin(\frac{s}{5}), 3\cos(\frac{s}{5}))$ e $\mathbf{T}(s) = \mathbf{c}'(s) = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\cos(\frac{s}{5}), -\frac{3}{5}\sin(\frac{s}{5}))$.

ii. Primeiro há que derivar $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{T}'(s) = (0, -\frac{3}{25}\sin(\frac{s}{5}), -\frac{3}{25}\cos(\frac{s}{5}))$. Segundo, calcular a norma $\|\mathbf{T}'(s)\| = \sqrt{\frac{3^2}{25^2}} = \frac{3}{25}$. $\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{\|\mathbf{T}'(s)\|} = (0, -\sin(\frac{s}{5}), -\cos(\frac{s}{5}))$.

iii.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(s) &= \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s) = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\cos(\frac{s}{5}), -\frac{3}{5}\sin(\frac{s}{5})) \times (0, -\sin(\frac{s}{5}), -\cos(\frac{s}{5})) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\cos(\frac{s}{5}) & -\frac{3}{5}\sin(\frac{s}{5}) \\ 0 & -\sin(\frac{s}{5}) & -\cos(\frac{s}{5}) \end{vmatrix} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\cos(\frac{s}{5}), -\frac{4}{5}\sin(\frac{s}{5})\right). \end{aligned}$$

É um vector unitário porque é o produto externo de dois vectores unitários. (Alternativamente podia-se calcular a norma e verificar que era 1).

(b) Das fórmulas de Frechet sabemos que a curvatura κ é apenas a norma $\|\mathbf{T}'(s)\| = \frac{3}{25}$ calculada na alínea *b) ii*. Das terceira fórmula de Frechet podemos calcular a torção $\tau = -\frac{\mathbf{B}'_j(s)}{\mathbf{N}_j(s)}$ usando, por exemplo, uma das componentes diferentes de zero, j, de cada um destes vectores: como $\mathbf{B}'(s) = \left(0, -\frac{4}{25}\sin(\frac{s}{5}), -\frac{4}{25}\cos(\frac{s}{5})\right)$. Usando a componente 2 pode constatar-se que $\tau = -\frac{-\frac{4}{25}\sin(\frac{s}{5})}{-\sin(\frac{s}{5})} = -\frac{4}{25}$.

Nota - as fórmulas de Frenet são:$\mathbf{T}'(s) = \kappa\mathbf{N}(s)$, $\mathbf{N}'(s) = -\kappa\mathbf{T}(s) + \tau\mathbf{B}(s)$ e $\mathbf{B}'(s) = -\tau\mathbf{N}(s)$.

3. Integrais múltiplos e centróides.

(a) Nota-se que

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(x+y)dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} xdxdy + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} ydxdy = 0,$$

uma vez que se tratam de integrais de funções ímpares em regiões simétricas em torno da origem.

(b) $\iint_S (x^3+y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{x^3}\left(x^3+y\right)dy = \int_0^1 dx \left[yx^3 + \frac{y^2}{2}\right]_0^{x^3} = \int_0^1 \frac{3x^6}{2}dx = \left[\frac{3x^7}{14}\right]_0^1 = \frac{3}{14}$.

(c) Faz-se a mudança para coordenadas polares.

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta. \end{aligned}$$

O jacobiano da transformação é r. O valor da função integranda é r^2. A região S é o quarto quadrante, correspondente a $\frac{3}{2}\pi \leq \theta \leq 2\pi$, e $0 \leq r \leq 2$. Ficamos com

$$\iint_S (x^2+y^2)dxdy = \int_0^2 \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} r^3 d\theta dr = \frac{\pi}{2}\int_0^2 r^3 dr = \frac{\pi}{2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 2\pi.$$

(d) É necessário calcular os pontos de intersecção da parábola com o eixo dos xx, $4 - x^2 = 0 \iff x = -2 \vee x = 2$.

Calcular o centróide corresponde a calcular o centro de massa com uma densidade unitária.

Vejamos as coordenadas x e y

$$x_C = \frac{\displaystyle\iint_S xdxdy}{\displaystyle\iint_S dxdy}, \qquad y_C = \frac{\displaystyle\iint_S ydxdy}{\displaystyle\iint_S dxdy}.$$

Por causa da simetria do problema o primeiro integral é nulo, a parábola é simétrica relativamente ao eixo dos yy, ou seja relativamente à recta $x = 0$.
É necessário calcular apenas y_C:

$$\begin{aligned}
\iint_S ydxdy &= \int_{-2}^{2} dx \int_0^{4-x^2} ydy = \int_{-2}^{2} dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{4-x^2} = \int_{-2}^{2} \frac{\left(4-x^2\right)^2}{2} dx \\
&= \int_{-2}^{2} \left(\frac{x^4}{2} - 4x^2 + 8\right) dx = \left[\frac{x^5}{10} - \frac{4x^3}{3} + 8x\right]_{-2}^{2} = \\
&= \frac{2^8}{3.5}
\end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned}
\iint_S dxdy &= \int_{-2}^{2} dx \int_0^{4-x^2} dy = \int_{-2}^{2} \left(4-x^2\right) dx \\
&= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{2^5}{3}.
\end{aligned}$$

Dividindo os valores obtemos:

$$y_C = \frac{\frac{2^8}{3.5}}{\frac{2^5}{3}} = \frac{8}{5}.$$

R.: $(x_C, y_C) = \left(0, \frac{8}{5}\right)$.

9 Teste Tipo 2 de Matemática II - Resolução

1. Integrais de linha

   (a) (2v.) Calcule o integral de linha do campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ao longo do caminho $c : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ quando:
   $$f(x, y, z) = x, \; c(t) = (2\sin(t), 2\cos(t), 2) \text{ com } t \in [0, \pi].$$

   R.: A função integranda é $x = 2\sin(t)$. A derivada da parametrização é $\frac{dc(t)}{dt} = (2\cos(t), -2\sin(t), 0)$ a sua norma vale
   $$\left\|\frac{dc(t)}{dt}\right\| = \sqrt{\left(2\cos(t)\right)^2 + \left(-2\sin(t)\right)^2} = \sqrt{4\cos^2(t) + 4\sin^2(t)} = \sqrt{4} = 2.$$

   O integral é simplesmente:

$$\int_0^{\pi} 2\sin(t)2\, dt = 4\int_0^{\pi} \sin(t)\, dt = 4\left[-\cos(t)\right]_0^{\pi} = 4\left[1-(-1)\right] = 8.$$

(b) Considere o campo vectorial $F(x,y,z) = (2x+yz, 2y+xz, xy)$.

i. (2v.) Mostre que existe $\phi(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\phi(x,y,z) = F$. Calcule $\phi(x,y,z)$.
R.: O rotacional de F deve ser zero para existir um potencial. Assim:

$$\nabla \times F = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \\ F_3(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_3(x,y,z)}{\partial y} - \frac{\partial F_2(x,y,z)}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial z} - \frac{\partial F_3(x,y,z)}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2(x,y,z)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-x \\ y-y \\ z-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

como $rotF = 0$ existe $\phi(x,y,z)$ tal que $\nabla\phi(x,y,z) = F(x,y,z)$.
Para obter o potencial podemos primitivar por exemplo $F_1(x,y,z)$ em ordem a x :

$$\phi(x,y,z) = \int F_1(x,y,z)\, dx + C(y,z) = \int (2x+yz)\, dx + C(y,z) = x^2 + xyz + C_1(y,z).$$

Fazendo o mesmo em ordem a y para $F_2(x,y,z)$ temos:

$$\phi(x,y,z) = \int F_2(x,y,z)\, dy + C_2(x,z) = \int (2y+xz)\, dy + C(x,z) = y^2 + xyz + C_2(x,z).$$

Fazendo o mesmo em ordem a z para $F_3(x,y,z)$ temos:

$$\phi(x,y,z) = \int F_3(x,y,z)\, dz + C_3(x,y) = \int xydz + C_3(x,y) = xyz + C_3(x,y).$$

Comparando o mesmo potencial $\phi(x,y,z)$ obtido em cada um dos casos determinamos as funções $C_1(y,z)$, $C_2(x,z)$ e $C_3(x,y)$:

$$\phi(x,y,z) = xyz + x^2 + C_1(y,z) = xyz + C_2(x,z) + y^2 = xyz + C_3(x,y).$$

Neste caso $C_1(y,z) = y^2 + c$, $C_2(x,z) = x^2 + c$ e $C_3(x,y) = x^2 + y^2 + c$, fazendo $c = 0$ obtemos o potencial: $\phi(x,y,z) = xyz + x^2 + y^2$

ii. (1v.) Calcule o integral de linha de F quando o ponto inicial é $(1,1,1)$ e o ponto final é $(2,1,3)$.
R.: Basta calcular $\phi(x_2,y_2,z_2) - \phi(x_1,y_1,z_1) = 2.1.3 + 2^2 + 1^2 - \left(1.1.1 + 1^2 + 1^2\right) = 8.$

2. Integrais de superfície

   (a) (2v.) Seja a superfície

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = z^2 \text{ e } 0 \leq z \leq 2\right\}$$

   e a função densidade de massa $\rho(x,y,z) = z$. Calcule a massa do cone.
   R.: É necessário calcular a norma do produto vectorial fundamental. Uma parametrização do cone será:

$$\Phi(r,\theta) = \begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= r \end{cases} \qquad 0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

   logo

$$\overrightarrow{P}(r,\theta) = \frac{\partial\Phi(r,\theta)}{\partial r} \times \frac{\partial\Phi(r,\theta)}{\partial\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\cos\theta \\ -r\sin\theta \\ r\cos^2\theta + r\sin^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\cos\theta \\ -r\sin\theta \\ r \end{bmatrix}$$

   A norma de $\overrightarrow{P}(r,\theta)$ é

$$\left\|\overrightarrow{P}(r,\theta)\right\| = \sqrt{(-r\cos\theta)^2 + (-r\sin\theta)^2 + r^2} = \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + r^2} = \sqrt{r^2+r^2} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{}$$

   A densidade $\rho(r,\theta) = r$, vindo a massa do cone dada pelo integral:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 r.\sqrt{2}r\ drd\theta = 2\pi\sqrt{2}\int_0^2 r^2\ dr = 2\pi\sqrt{2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi.$$

   (b) (2v.) Considere $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 9\right\}$ uma esfera orientada com a normal a apontar para o exterior da superfície. Seja $\overrightarrow{F} = (x,y,z)$.

$$I = \int\int_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\ dS,$$

   $\overrightarrow{n}$ representa o vector normal unitário a S. Calcule este integral.
   R.: É um dos exercícios mais simples do teste. Como a esfera é uma superfície fechada, regular e orientável e a função é diferenciável, o teorema de Gauss afirma:

$$\int\int_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\ dS = \iiint_V \operatorname{div}\overrightarrow{F}\ dV,$$

   onde V é o volume do sólido encerrado pela superfície esférica de raio 3. A divergência de $\overrightarrow{F}(x,y,z)$ é $\frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial F_3(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1+1+1 = 3$. Assim o integral vale

$$\int\int_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\ dS = \iiint_V \operatorname{div}\overrightarrow{F}\ dV = \iiint_V 3\ dV = 3\iiint_V dV = 3\ \text{vol}\,(\text{esfera}) = 3\frac{4}{3}\pi 3^3 = 108\pi.$$

3. Resolva as equações diferenciais

(a) (2v.) $y'(t) + t\,y(t) = t$, com $y(0) = 1$.

R.: É uma equação diferencial linear de primeira ordem do tipo $y'(t) + a(t)\;y(t) = b(t)$ (mas também é separável e pode ser resolvida de outra forma). O factor integrante é $\mu(t) = e^{\int t dt} = e^{\frac{t^2}{2}}$, a solução é

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left(Cte + \int b(t)\,\mu(t)\,dt\right) = e^{-\frac{t^2}{2}}\left(Cte + \int te^{\frac{t^2}{2}}dt\right) = e^{-\frac{t^2}{2}}\left(Cte + e^{\frac{t^2}{2}}\right) = e^{-\frac{t^2}{2}}Cte + 1.$$

O problema de Cauchy tem solução

$$y(0) = 1 \Rightarrow Cte + 1 = 1 \Leftrightarrow Cte = 0.$$

Ou seja $y(t) = 1$.

(b) (2v.) $t\,y'(t) + t\,y(t) = \left(1 + t^2\right)\;y(t)$, com $y(1) = e$.

R.: Esta é uma equação separável

$$\begin{aligned} t\,y'(t) + t\,y(t) &= \left(1+t^2\right)\;y(t) \Leftrightarrow t\,y'(t) = -t\,y(t) + \left(1+t^2\right)\;y(t) \Leftrightarrow t\,y'(t) = \left(1 - t + t^2\right)\;y(t \\ \frac{y'(t)}{y(t)} &= \frac{1-t+t^2}{t} \Leftrightarrow \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{t} - 1 + t, \end{aligned}$$

primitivam-se ambos os membros e obtém-se

$$\log|y(t)| = \log|t| - t + \frac{t^2}{2} + Cte \Leftrightarrow y(t) = e^{\log|t| - t + \frac{t^2}{2} + Cte} \Leftrightarrow y(t) = Ate^{-t+\frac{t^2}{2}}$$

em que $A = e^{Cte}$. O problema de Cauchy tem solução

$$y(1) = e \Leftrightarrow e = A.1.e^{-1+\frac{1^2}{2}} \Leftrightarrow e = Ae^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow A = e^{\frac{3}{2}}.$$

(c) (2v.) Uma casa estava a uma temperatura $(T(0))$ de dez graus no início da manhã. Entretanto a temperatura exterior (T_{ext}) é de 30 graus. A constante de inércia térmica é de $\alpha = 0.3465h^{-1}$. Quanto tempo demorou a casa a atingir os vinte graus?

Para resolver o problema necessita de saber que $log\frac{1}{2} \simeq -0,693$ e a equação diferencial a resolver é $\frac{dT(t)}{dt} = -\alpha\,(T(t) - T_{ext})$. Considere como unidade a hora.

R.: Primeiro há que resolver a equação diferencial, que é uma equação separável:

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\alpha\,(T(t) - T_{ext}) \Leftrightarrow \frac{dT(t)}{(T(t) - T_{ext})\,dt} = -\alpha$$

primitivndo ambos os membros obtém-se

$$\begin{aligned} \log|T(t) - T_{ext}| &= -\alpha t + Cte \Leftrightarrow T(t) - T_{ext} = e^{-\alpha t + Cte} \\ T(t) &= T_{ext} + Ae^{-\alpha t}, \end{aligned}$$

em que $A = e^{Cte}$, substituímos as constantes conhecidas

$$T(t) = 30 + Ae^{-0.3465t}.$$

Falta resolver o problema de Cauchy, em $t = 0$ a temperatura era de 10^oC, logo

$$T(0) = 10 = 30 + Ae^0 \Leftrightarrow A = -20^oC.$$

A solução fica

$$T(t) = 30 - 20e^{-0.3465t},$$

o tempo que a casa demora a atingir os 20^oC é obtido resolvendo a equação

$$20 = 30 - 20e^{-0.3465t} \Leftrightarrow e^{-0.3465t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{\log\frac{1}{2}}{-0.3465} = \frac{-0,693}{-0.3465} = 2\text{horas}.$$

4. (1v.) Desenhe uma espiral com cinco trocos inscrita num rectângulo dourado com lado menor de 8cm.

5. (1v.) Tendo como unidade dez centímetros, represente com régua e compasso as raízes de cinco e seis.

6. (1.v.) Indique, segundo o modulor de Le Corbusier, quais seriam, no seu entender, as alturas de uma secretária, um estirador, a altura do assento de uma cadeira e de uma mesa de cabeceira. Indique quais os elementos do modulor usado e se pertencem à sequência encarnada (base= $1.829m$) ou sequência azul (base= $2.26m$).

   R.: A sequência do modulor vermelho é a coluna da esquerda, a do Modulor Azul corresponde à coluna da direita

$$\begin{array}{ll}
\ldots & \ldots \\
\Phi^v_{-6} = 0.101940 & \Phi^a_{-6} = 0.125961 \\
\Phi^v_{-5} = 0.164938 & \Phi^a_{-5} = 0.203805 \\
\Phi^v_{-4} = 0.26687 & \Phi^a_{-4} = 0.329757 \\
\Phi^v_{-3} = 0.431796 & \Phi^a_{-3} = 0.533547 \\
\Phi^v_{-2} = 0.698645 & \Phi^a_{-2} = 0.863279 \\
\Phi^v_{-1} = 1.13041 & \Phi^a_{-1} = 1.39679 \\
\Phi^v_0 = 1.829 & \Phi^a_0 = 2.26 \\
\Phi^v_1 = 2.95932 & \Phi^a_1 = 3.65668 \\
\Phi^v_2 = 4.78818 & \Phi^a_2 = 5.91651 \\
\Phi^v_3 = 7.74728 & \Phi^a_3 = 9.57291 \\
\Phi^v_4 = 12.5351 & \Phi^a_4 = 15.489 \\
\ldots & \ldots
\end{array}$$

   A secretária que tenho em casa corresponde a $\Phi^a_{-3} = 0.533547m$, o meu estirador corresponde a $\Phi^v_{-2} = 0.698645m$ (outras medidas poderiam ser aceitáveis) o assento terá a altura $\Phi^v_{-3} = 0.431796m$ e a mesa de cabeceira poderá ser de $\Phi^a_{-3} = 0.533547m$ se o leito for ligeiramente inferior em altura.

7. (2v.) Demonstre que a sequência do modulor de Le Corbusier é de Fibonacci.

   R.: Basta considerar que qualquer termo da série azul ou vermelha obedece à relação

$$\Phi_n = \phi \times \Phi_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

   em que $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é a razão dourada. Na sequência vermelha temos $\Phi_0 = 1.829m$ e na vermelha $\Phi_0 = 2.26m$. Repare que $\phi^2 = \phi + 1$, assim, por exemplo para todo o n temos

$$\Phi_n = \phi^2 \times \Phi_{n-2} \Leftrightarrow \Phi_n = (\phi + 1) \times \Phi_{n-2} \Leftrightarrow \Phi_n = \phi\Phi_{n-2} + \Phi_{n-2} \Leftrightarrow \Phi_n = \Phi_{n-1} + \Phi_{n-2},$$

   logo o enésimo termo da sequência é a adição dos dois termos anteriores. O termo de ordem zero é a base de cada uma das sequências, $1.829m$ e $2.26m$. O termos de ordem 1 podem-se ver na tabela do exercício 6. As sequências podem-se calcular até qualquer ordem, em ambos os casos, de forma única sabendo que são sequências de Fibonacci.